ÉNONCÉ

NOTATIONS :

- $S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e_n$
- $D_N = \sum_{|n| \leq N} e_n$ NOYAU DE DIRICHLET d'ordre N.
- $k_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$ noyau de FÉJER d'ordre N.
- $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ n^e moy de Césaro des $(S_n(f))$

PRÉREQUIS :
- $\sigma_N(f) = k_N * f$.
- $k_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$

1. (continuité des translations) : $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall f \in L^p_{2\pi}$, $\lim_{a \to 0} \| \tau_a f - f \|_p = 0$.

2. Théorème de Féjer

A) si $f \in C_{2\pi}$ $\| \sigma_N f - f \|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

B) si $f \in L^p_{2\pi}$ $\| \sigma_N f - f \|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ $(p < +\infty)$.

LEÇONS.

209

246

234

RÉFS.

⚠ beaucoup modifiées

2. [ERA] El Amrani suites et séries de Fourier p. 190

1. Inspiré du Briane Pagès - théorie de l'intégration (cas sur $\mathbb{R}$)

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $\sigma_N(f) = f * k_N$.
2.
   - $\| k_N \|_{L^1_{2\pi}} = 1$
   - $k_N \geq 0$.
   - $k_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$
3. Conti + périodique $\Rightarrow$ unif conti
4. $\overline{C_{2\pi}} = L_{2\pi}$.

DÉMO

: à l'oral.
écrit au tableau.
: pour comprendre.

$p \in [1, +\infty[$

1. **TH** : $\forall f \in L^p_{2\pi}$ $\quad \|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0$.

On va utiliser la densité des fonctions C_c.

Soit $\varepsilon > 0$.

LEM : $\overline{C_{2\pi}} = L^p_{2\pi}$: on va bcp l'utiliser dans la suite → permet de faire les choses en 2 temps en commençant par cas + simple.

Si $f \in C_{2\pi}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \|\tau_a f - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \overbrace{|f(x-a) - f(x)|}^{\text{on veut ctrl ça unif en } x.}$$

or $f \in C_{2\pi}$ donc (par le th. de Heine) unif conti sur $\mathbb{R}$.

. $\exists \underbrace{\delta > 0}_{\text{indép. de } x}$, $\forall x, a \in \mathbb{R}$ $|x-a-x| = |a| < \delta \Rightarrow |f(x-a) - f(x)| = |\tau_a f(x) - f(x)| < \varepsilon$

Donc $\forall |a| < \delta$, $\|\tau_a f - f\|_p \leq \underbrace{\|\tau_a f - f\|_\infty < \varepsilon}_{(*)}$

Si $f \in L^p_{2\pi}$:

$\overline{C_{2\pi}} = L^p_{2\pi}$. Donc $\exists g \in C_{2\pi}$, $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Soit $a > 0$

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \underbrace{\|\tau_a f - \tau_a g\|_p}_{= \|f-g\|_p} + \|\tau_a g - g\|_p + \|f - g\|_p \quad \text{avec un CV}$$

mais par ce qui préc, $\|\tau_a g - g\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0$. donc.

or $\limsup_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p \leq 2\varepsilon$

D'où le résultat en faisant $\varepsilon \to 0$.

On en déduit $g : t \mapsto \|\tau_t f - f\|_p$ $\in C_{2\pi}$ → 2π pér : car f l'est. → conti : par prop des translat, suffit mq conti en 0 pr mq conti sur $\mathbb{R}$.

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_b(\tau_{a-b} f - f)\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p.$$

2. $\sigma_N(f) = f * k_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

Lem : $\forall N \in \mathbb{N}$, (1) $k_N \geq 0$,

(2) $\|k_N\|_1 = 1$

(3) $k_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \quad \forall t \neq 0.$

ces 3 prop font de k_N une approx unité.
on va mimer dans ce cas particulier la preuve générale de CV $f * p_n \to f$ où (p_n) approx unité

Ⓐ. si f $C_{2\pi}$ mq $\|\sigma_N f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

$\varepsilon > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$\|\cdot\|_\infty$ donc on regarde la val. absolue

$$|f(x) - \sigma_N f(x)| = \left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, k_N(t)\, dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-t))\, k_N(t)\, dt\right|$$ par (1)

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|\, k_N(t)\, dt$$ par (2) et inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\tau_t f - f\|_\infty\, k_N(t)\, dt$$

or $\|\tau_t f - f\|_\infty \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ par (*) donc $\exists\, 0 < \delta < \pi$ tq $\forall |t| < \delta$, $\|\tau_t f - f\|_\infty < \varepsilon$

$$|f(x) - \sigma_N f(x)| \leq \varepsilon \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} k_N(t)\, dt}_{\leq 1} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\underbrace{\int_{\pi > |t| > \delta} k_N(t)\, dt}_{\text{on veut ctrl ce bout}}.$$

majo par $\|k_N\|_{L^1}$ qui vaut 1

Reste à majo 2e membre : ok par prop k_N.

Or, $\forall |t| > \delta$, $k_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{N \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} 0}.$$

majo numérateur par 1 + croissance de $\sin^2$ sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$.

$t \mapsto \sin(\frac{t}{2})^2$ paire. ↗ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

ici, sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$

$\delta \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\delta}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\delta}{2}) \leq \sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗

$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\delta/2)^2} \geq \frac{1}{\sin(t/2)^2}$

Donc $0 \leq \limsup_{N \to \infty} \|f - \sigma_N f\|_\infty \leq \varepsilon$.

B) si $f \in L^p_{2\pi}$. $\forall x \in [-\pi, \pi]$,

$$|\sigma_N f(x) - f(x)|^p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, k_N(t)\, dt\right)^p$$ comme précédemment

On applique l'inégalité de Hölder pour la mesure $\underbrace{k_N(t)dt}_{}/2\pi$

mesure à densité DE PROBA car ≥ 0 et $\| \|_{L_{2\pi}} = 1$.

On obtient :

$$|\sigma_N f(x) - f(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t)\, |\tau_t f(x) - f(x)|^p\, dt.$$

$$\|\sigma_N f - f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f(x) - f(x)|^p\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tau_t f(x) - f(x)|^p\, dx\right) dt \quad \text{(Fubini Tonelli)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t)\, \underbrace{\|\tau_t f - f\|_p^p}_{g(-t)}\, dt \quad \text{avec } g : t \mapsto \|\tau_{-t} f - f\|_p^p$$

$$\leq g * k_N(0) = \sigma_N g(0).$$

Or g est $C_{2\pi}$ par 1 (2π per car f l'est)

Donc par le 1er cas, $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_N f - f\|_p = g(0) = 0$. (CVU $\Rightarrow$ CVS) ∎